پاسخنامه تشریحی فصل هشتم

آزمون جامع ۱

۱. گزینهٔ «۲»

ابتدا دامنه‌ی تابع را محاسبه کرده و سپس ضابطه‌ی تابع را می‌یابیم: $۳ \geq$

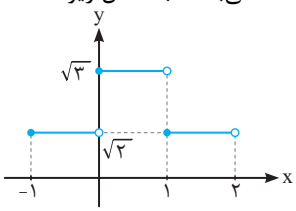
بنابراین به جای $[x]^۲$ یکی از اعداد صحیح ۰، ۱، ۲ یا ۳ را می‌توان قرار داد، پس:

$$[x]^۲ = ۰ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow ۰ \leq x < ۱ \qquad (۱)$$

$$[x]^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} [x] = ۱ \Rightarrow ۱ \leq x < ۲ & (۲) \\ [x] = -۱ \Rightarrow -۱ \leq x < ۰ & (۳) \end{cases}$$

$$\begin{cases} [x]^۲ = ۲ \Rightarrow [x] = \pm\sqrt{۲} \notin \mathbb{Z} \\ [x]^۲ = ۳ \Rightarrow [x] = \pm\sqrt{۳} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow \text{غ ق ق}$$

پس فقط موارد «۱»، «۲» و «۳» مورد قبول هستند و چون سه بازه‌ی مختلف داریم نمودار تابع شامل سه پاره‌خط می‌باشد، به شکل زیر:



$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = \sqrt{۳-۰} = \sqrt{۳}$$

$$-۱ \leq x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = \sqrt{۳-۱} = \sqrt{۲}$$

$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = \sqrt{۳-۱} = \sqrt{۲}$$

۲. گزینهٔ «۳» اصلاحیه: در کتاب به اشتباه گزینهٔ «۲» خورده.

از آن‌جایی‌که $[\frac{x}{۳}]$ عبارتی صحیح است، شرط لازم برای داشتن جواب این است که $\frac{۳}{۲}x$ هم عددی صحیح باشد، پس:

$$\frac{۳}{۲}x = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow ۳x = ۲n \Rightarrow x = \frac{۲}{۳}n$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$n = \left[\frac{\frac{۲}{۳}n}{۳}\right] \Rightarrow [\frac{۲}{۹}n] = n$$

$$\xrightarrow{\text{ویژگی جزء صحیح}} n \leq \frac{۲}{۹}n < n+۱ \xrightarrow{\times ۹}$$

$$\Rightarrow ۹n \leq ۲n < ۹n+۹ \Rightarrow \begin{cases} ۹n \leq ۲n \Rightarrow ۷n \leq ۰ \Rightarrow n \leq ۰ \\ ۲n < ۹n+۹ \Rightarrow -۷n < ۹ \Rightarrow n > \frac{-۹}{۷} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -\frac{۹}{۷} < n \leq ۰ \xrightarrow[\text{اشتراک}]{n \in \mathbb{Z}} n = -۱, ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = -۱ \Rightarrow x = -\frac{۲}{۳} \\ n = ۰ \Rightarrow x = ۰ \end{cases}$$

پس معادله دارای ۲ جواب است.

۳. گزینهٔ «۱»

با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم که $[x]^۲ \geq ۰ \Rightarrow ۳ \geq [x]$ یا $۳ - [x]^۲$، $f(۱) = f(۲) = a$، پس:

$$f(۱) = \frac{۱}{[۱]} = ۱ \Rightarrow a = ۱$$

هم‌چنین برای مقادیر کم‌تر از ۲ و ۳ داریم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) = c \Rightarrow \frac{۲}{[۲^-]} = c \Rightarrow \frac{۲}{۱} = c \Rightarrow c = ۲ \\ \lim\limits_{x \to ۳^-} f(x) = b \Rightarrow \frac{۳}{[۳^-]} = b \Rightarrow \frac{۳}{۲} = b \Rightarrow b = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b + c = ۱ + \frac{۳}{۲} + ۲ = ۴/۵$$

۴. گزینهٔ «۲»

باید حدود عبارت‌های داخل جزء صحیح را بیابیم. از آن‌جایی که $\sin\alpha$ در $\alpha = ۰$، $\alpha = \pi$ و ... برابر صفر می‌شود که هیچ‌کدام عددی طبیعی نیستند و هم‌چنین $\sin\frac{\pi}{۲} = ۱$ است که $\frac{\pi}{۲}$ هم عددی طبیعی نیست، پس برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$۰ < \sin^۲ n < ۱ \Rightarrow [\sin^۲ n] = ۰$$

هم‌چنین داریم:

$$۴n^۲ < ۴n^۲ + ۲n < ۴n^۲ + ۴n + ۱ \Rightarrow (۲n)^۲ < ۴n^۲ + ۲n < (۲n+۱)^۲$$

$$\Rightarrow ۲n < \sqrt{۴n^۲ + ۲n} < ۲n + ۱ \Rightarrow [\sqrt{۴n^۲ + ۲n}] = ۲n$$

$$\Rightarrow [\sqrt{۴n^۲ + ۲n}] + [\sin^۲ n] = ۲n + ۰ = ۲n$$

۵. گزینهٔ «۳»

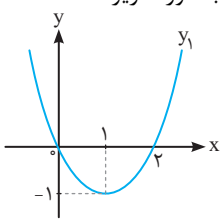
کافی است نمودار تابع $y_۱ = x^۲ - ۲x$ را در فاصله‌ی $(۰,۲)$ رسم کرده و سپس نمودار $[y_۱]$ را بکشیم:

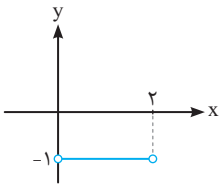
$$y_۱ = x^۲ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰, ۲$$

مختصات رأس سهمی این تابع هم به‌صورت $S(-\frac{b}{۲a}, y_۱(-\frac{b}{۲a}))$ است، یعنی:

$$-\frac{b}{۲a} = \frac{۲}{۲\times ۱} = ۱ \Rightarrow y_۱(۱) = -۱ \Rightarrow S(۱,-۱)$$

بنابراین نمودار $y = [x^۲ - ۲x]$ در بازه‌ی $(۰,۲)$ به‌صورت زیر است:





با توجه به شکل تابع هم مشاهده می‌کنیم که در بازه‌ی $(۰,۲)$ نمودار تابع در بازه‌ی $[-۱,۰)$ درحال تغییر است، پس:

$$۰ < x < ۲ \Rightarrow -۱ \leq x^۲ - ۲x < ۰ \Rightarrow [x^۲ - ۲x] = -۱$$

۶. گزینهٔ «۱»

$$(\frac{1}{8})^{[x]}=4^{1-[x]}\Rightarrow(2^{-3})^{[x]}=(2^{2})^{1-[x]}$$

$$\Rightarrow 2^{-3[x]}=2^{2-2[x]}\Rightarrow -3[x]=2-2[x]\Rightarrow[x]=-2$$

$$\Rightarrow -2\le x<-1$$

۷. گزینهٔ «۳» اصلاحیه: در پاسخ‌نامهٔ کلیدی به اشتباه گزینهٔ «۴» خورده.

طبق نکات درسنامه می‌دانیم که هرگاه a عددی بزرگ‌تر از یک باشد، $[\log a]$ برابر تعداد ارقام عدد a منهای یک و اگر $0<a<1$ باشد، حاصل $[\log a]$ برابر تعداد صفرهای قبل و بعد از ممیز با علامت منفی است، پس:

$$[\log 111]=3-1=2\ ,\ [\log 0/003]=-3$$

لذا داریم:

$$2+(-3)+[\log N]=9\Rightarrow[\log N]=10$$

$$\Rightarrow \text{تعداد ارقام عدد } N-1=10\Rightarrow \text{تعداد ارقام عدد } N=11$$

۸. گزینهٔ «۲»

$$x=\sqrt[5]{5}\Rightarrow x^{5}=5$$

$$\Rightarrow[\frac{2}{x^{5}}]+[-\frac{2}{x^{5}}]=[\frac{2}{5}]+[-\frac{2}{5}]=0+(-1)=-1$$

۹. گزینهٔ «۳»

$$|2x+5|<13\Rightarrow -13<2x+5<13$$

$$\xrightarrow{-5}-18<2x<8\xrightarrow{\div 2}-9<x<4$$

$$\xrightarrow{-1}-10<x-1<3$$

$$\xrightarrow{\div 4}-\frac{10}{4}<\frac{x-1}{4}<\frac{3}{4}\Rightarrow[\frac{x-1}{4}]=-3,-2,-1,0$$

۱۰. گزینهٔ «۱»

روش اول:

$$[x-1]+[2-x]=[x]+(-1)+2+[-x]$$

$$=[x]+[-x]+1\xrightarrow[{[x]+[-x]=-1}]{x\notin\mathbb{Z}}-1+1=0$$

روش دوم: کافی است به جای x عددی غیر صحیح مثلاً ۱/۵ را قرار دهید.

آزمون جامع ۲

۱. گزینهٔ «۲»

یادآوری (۱): $n\in\mathbb{Z}\Rightarrow[x\pm n]=[x]\pm n$

یادآوری (۲): $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

با توجه به توضیحات فوق، ابتدا عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$([x]+1)+([x]+2)+...+([x]+20)-20[x]$$

$$=\cancel{20[x]}+(1+2+...+20)-\cancel{20[x]}=\frac{20(20+1)}{2}=210$$

۲. گزینهٔ «۳»

یادآوری: $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\end{cases}$

پس ابتدا ضابطه‌ی داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$[x+1]+[7-x]+[x]+[1-x]=[x]+1+7+[-x]+[x]+1+[-x]$$

$$=9+2[x]+2[-x]=9+2([x]+[-x])\xlongequal{x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}}9+2(-1)=7$$

۳. گزینهٔ «۴»

با توجه به ویژگی $[x]=n\Leftrightarrow n\le x<n+1$، داریم:

$$\begin{cases}[x^{2}-6x]=6\Rightarrow 6\le x^{2}-6x<7\\ [x^{2}-8x]=6\Rightarrow 6\le x^{2}-8x<7\end{cases}$$

با جمع طرفین این دو نامساوی داریم:

$$12\le 2x^{2}-14x<14\xrightarrow{\div 2}6\le x^{2}-7x<7\Rightarrow[x^{2}-7x]=6$$

۴. گزینهٔ «۳»

با توجه به بازه‌ی داده‌شده یعنی $-2\le x\le 1$ عبارت $(x-2)$ همواره منفی بوده و داریم: $|x-2|=-(x-2)$ بنابراین ضابطه‌ی تابع به‌صورت $y=-x+2+[x]$ ساده می‌شود که برای رسم این تابع، ضابطه‌ی تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

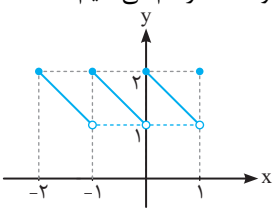
$$-2\le x<-1\xrightarrow{[x]=-2}y=-x+2-2\Rightarrow y=-x$$

$$-1\le x<0\xrightarrow{[x]=-1}y=-x+2-1\Rightarrow y=-x+1$$

$$0\le x<1\xrightarrow{[x]=0}y=-x+2+0\Rightarrow y=-x+2$$

$$x=1\xrightarrow{[x]=1}y=-1+2+1=2$$

و در نتیجه نمودار تابع را در بازه‌های به‌وجود آمده رسم می‌کنیم.



۵. گزینهٔ «۱» اصلاحیه: به اشتباه در پاسخ‌نامهٔ کلیدی گزینهٔ «۲» خورده.

روش اول: $(\underbrace{|x|+2}_{\text{همواره مثبت}})([x]-3)\le 0\Rightarrow[x]-3\le 0\Rightarrow[x]\le 3$

با توجه به این‌که $[x]$ همواره مقداری صحیح است، پس $[x]$ می‌تواند یکی از اعداد زیر باشد:

$$\begin{cases}[x]=3\Rightarrow 3\le x<4\\ \text{یا}\\ [x]=2\Rightarrow 2\le x<3\\ \text{یا}\\ [x]=1\Rightarrow 1\le x<2\\ \vdots\qquad\vdots\end{cases}\xrightarrow[\text{همه‌ی جواب‌ها است.}]{\text{جواب کلی، اجتماع}}x<4$$

روش دوم: عدد گذاری

۶. گزینهٔ «۱» اصلاحیه: به اشتباه در پاسخ نامهٔ کلیدی گزینهٔ «۲» خورده.

روش اول: با توجه به این‌که n عدد طبیعی است، نامساوی زیر همواره برقرار است:

$$n^{2}+2n+1<n^{2}+4n+3<n^{2}+4n+4$$

$$\Rightarrow(n+1)^{2}<n^{2}+4n+3<(n+2)^{2}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}}n+1<\sqrt{n^{2}+4n+3}<n+2$$

$$\Rightarrow[\sqrt{n^{2}+4n+3}]=n+1$$

روش دوم: کافی است $n=100$ را در عبارت جایگزین نماییم:

$$[\sqrt{n^{2}+4n+3}]=[\sqrt{10000+400+3}]$$

$$=[\sqrt{10403}]=[101/99]=101$$

به ازای $n=100$ فقط گزینهٔ «۱» برابر ۱۰۱ می‌شود.

۷. گزینهٔ «۲»

$$\left[\frac{3x+1}{x}\right]=5 \Rightarrow \underbrace{5\le \overbrace{\frac{3x+1}{x}}^{(2)}}_{(1)}<6$$

نامعادلات شماره‌ی (۱) و (۲) را حل کرده و سپس بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$5\le\frac{3x+1}{x}\Rightarrow 0\le\frac{3x+1}{x}-5\Rightarrow 0\le\frac{3x+1-5x}{x}\Rightarrow\frac{1-2x}{x}\ge 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & 0 & & \frac{1}{2} & \\ \hline \frac{1-2x}{x} & - & \| & + & | & - \\ & & & \text{جواب} & & \end{array} \Rightarrow 0<x\le\frac{1}{2} \qquad (1)$$

$$\frac{3x+1}{x}<6\Rightarrow\frac{3x+1}{x}-6<0\Rightarrow\frac{3x+1-6x}{x}<0\Rightarrow\frac{1-3x}{x}<0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & 0 & & \frac{1}{3} & \\ \hline \frac{1-3x}{x} & - & | & + & | & - \\ & \text{جواب} & & & & \text{جواب} \end{array} \Rightarrow x<0 \text{ یا } x>\frac{1}{3} \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)}\frac{1}{3}<x\le\frac{1}{2}$$

۸. گزینهٔ «۴»

$$1\le x\le 3\Rightarrow[\sqrt{x}]=1$$

$$\xrightarrow{\text{یعنی}}[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]=1+1+1=\underline{3}\times 1=3$$

$$4\le x<9\Rightarrow[\sqrt{x}]=2\Rightarrow[\sqrt{4}]+\ldots+[\sqrt{8}]$$

$$=(2+\ldots+2)=\underline{5}\times 2=10$$

$$9\le x<16\Rightarrow[\sqrt{x}]=3\Rightarrow[\sqrt{9}]+\ldots+[\sqrt{15}]$$

$$=(3+\ldots+3)=\underline{7}\times 3=21$$

$$16\le x<25\Rightarrow[\sqrt{x}]=4\Rightarrow[\sqrt{16}]+\ldots+[\sqrt{24}]$$

$$=(4+\ldots+4)=\underline{9}\times 4=36$$

$$25\le x<36\Rightarrow[\sqrt{x}]=5\Rightarrow[\sqrt{25}]+\ldots+[\sqrt{35}]$$

$$=(5+\ldots+5)=\underline{11}\times 5=55$$

با همین استدلال سرانجام داریم:

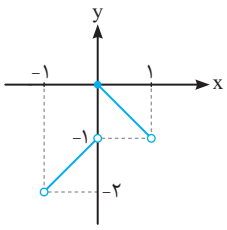
$$A=3\times 1+5\times 2+7\times 3+9\times 4+11\times 5$$
$$+13\times 6+15\times 7+17\times 8+19\times 9\Rightarrow A=615$$

۹. گزینهٔ «۳»

$$-1<x<0\Rightarrow\begin{cases}|x|=-x\\ [x]=-1\end{cases}\Rightarrow y=-1-(-x)=x-1$$

$$0\le x<1\Rightarrow\begin{cases}|x|=x\\ [x]=0\end{cases}\Rightarrow y=0-x\Rightarrow y=-x$$

و در نتیجه شکل تابع هم به‌صورت زیر می‌باشد:



۱۰. گزینهٔ «۳»

می‌دانیم که هر عدد حقیقی از یک قسمت صحیح و یک جزء اعشاری تشکیل شده است، یعنی: $x\in\mathbb{R}\Rightarrow x=[x]+P_x \qquad (1)$

با توجه به مفروضات مسأله

$$x+[y]=3/7\xrightarrow{(1)}[x]+P_x+[y]=3/7\Rightarrow P_x=0/7$$

پس عدد گزینهٔ (۳) دارای جزء اعشاری ۰/۷ می‌باشد، زیرا:

$$-2/3=-3+0/7\Rightarrow x=-2/3$$